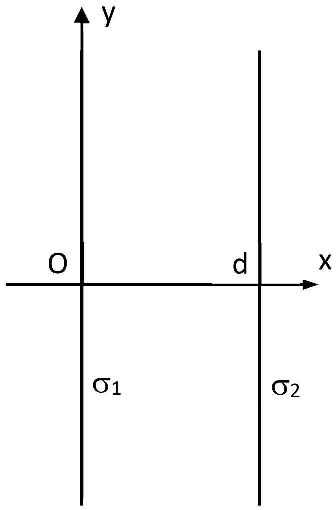
Prova scritta di Fisica 2 9.6.2018

Esercizio n.1 **[10 punti]**

Due piani virtualmente infiniti (in y,z) sono posti rispettivamente nei punti x=0 e x=d (vedi figura). Sui due piani sono depositate due cariche con densità superficiale di carica σ_1 e σ_2 entrambe maggiori di zero.
Si calcolino le espressioni del campo elettrico e del potenziale elettrostatico in tutto lo spazio assumendo nullo il potenziale nell'origine. Si faccia un grafico del potenziale in funzione della coordinata x. Si calcoli il valore del potenziale elettrostatico nel punto x=d.

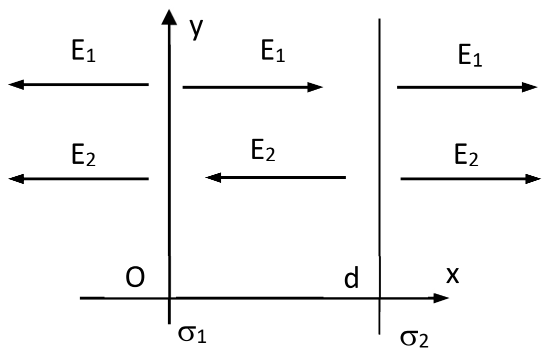


d = 2 cm ; σ_1 = 27 pC/m^2 ; σ_2 = 9 pC/m^2

Soluzione

Il problema può essere risolto utilizzando il teorema di sovrapposizione: il campo elettrico ed il potenziale di una serie di cariche (in un sistema lineare) sono uguali alla somma dei campi elettrici e dei potenziali creati da ogni singola carica.

I campi elettrici creati dalle due distribuzioni di carica σ_1 e σ_2 saranno quelli mostrati in figura. Il modulo sarà:



$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \quad ; \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

Mentre i campi, vettorialmente, saranno:

$$\begin{cases} x < 0 & \overline{E} = E_1 + E_2\ (-\hat{x}) = -\dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{x} \\ 0 < x < d & \overline{E} = E_1 - E_2\ (\hat{x}) = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{x} \\ x > d & \overline{E} = E_1 + E_2\ (\hat{x}) = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{x} \end{cases}$$

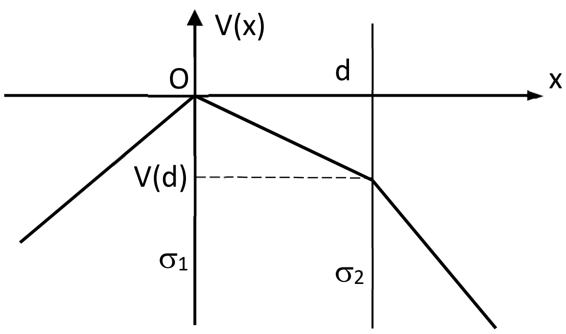
Il potenziale sarà:

x<0 $\quad V(x) = -\int_{c1}^{x} \overline{E}(x)\cdot\overline{dx} = (E_1 + E_2)x + c1$; V(0)=0, quindi c1=0 e: $V(x) = (E_1 + E_2)x = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\,x$ $\therefore$

0<x<d $\quad V(x) = -\int_{c2}^{x} \overline{E}(x)\cdot\overline{dx} = -(E_1 - E_2)x + c2$; V(0)=0, quindi c2=0 e: $V(x) = -(E_1 - E_2)x = -\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}\,x$ $\therefore$

x>d $\quad V(x) = -\int_{c3}^{x} \overline{E}(x)\cdot\overline{dx} = -(E_1 + E_2)x + c3$; V(d$^-$)=V(d$^+$), quindi c3= 2 E_2 d e:

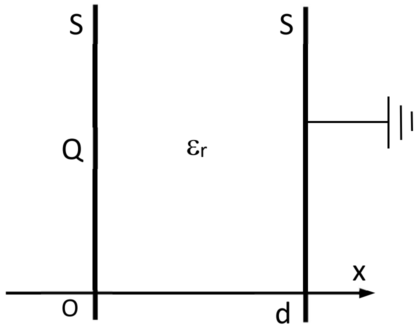
$$V(x) = -(E_1 + E_2)x + 2E_2x = -\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\,x + \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\,d \quad \therefore$$



Numericamente:

V(d) = $\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2\varepsilon_0}$ d = - 0,02 Volt = - 20 mV $\therefore$

Esercizio n.2 **[10 punti]**



Un condensatore piano è completamente riempito con un materiale dielettrico non omogeneo la cui costante dielettrica relativa ε_r varia lungo, nell'intervallo fra x=0 e x=d, secondo la legge: $\varepsilon_r(x)= ax +b$. L'armatura posta in x=0 possiede la carica elettrica Q, mentre l'armatura in x=d è messa a terra. Calcolare a) la differenza di potenziale esistente fra le armature del condensatore. b) la capacità del condensatore. Si consideri il condensatore ideale, senza effetti ai bordi.
Nota: le armature sono molto distanti, la capacità quindi verrà molto piccola.

Dati: a = 1 cm^{-1} ; b = 1 ; d = 1,72 cm ; Q = 10 pC ; S = 1/9 cm^2

Soluzione

Nel dielettrico sarà prsente un campo D che vale : $D = \sigma = \frac{Q}{S}$, costante lungo la direzione x.
Il campo elettrico E invece varierà secondo la legge: $E(x) = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q}{S\varepsilon_0}\frac{1}{ax+b}$
Il potenziale elettrostatico in un punto x sarà:

$V(x) = -\int^x \overline{E}\cdot\overline{dx} = -\frac{Q}{S\varepsilon_0}\int^x \frac{dx}{ax+b} = -\frac{Q}{aS\varepsilon_0}\ln\frac{ax+b}{c}$ la costante c deve essere tale che V(d)=0, quindi:

$V(d) = -\frac{Q}{aS\varepsilon_0}\ln\frac{ad+b}{c} = 0$ cioè $c = ad + b$ quindi:

$$\Delta V = V(0) - V(d) = V(0) = -\frac{Q}{aS\varepsilon_0}\ln\frac{b}{ad+b} = \frac{Q}{aS\varepsilon_0}\ln\frac{ad+b}{b} = \frac{Q}{aS\varepsilon_0}\ln\left(1+\frac{ad}{b}\right) \quad \therefore$$

Numericamente: $\Delta V = \frac{Q}{a\,S\,\varepsilon_0}\ln\left(1+\frac{ad}{b}\right) = \frac{10^{-11}}{10^2\cdot\frac{1}{9}10^{-4}\cdot 9\cdot 10^{-12}}\ln 2{,}72 = 1000\ \mathrm{V} \quad \therefore$

La capacità sarà: $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{10^{-11}}{10^3} = 10^{-14}\,C = 0{,}01\ pC \quad \therefore$

Soluzione 2 per il calcolo della capacità:

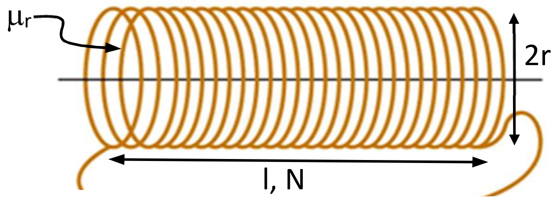
Posso considerare il condensatore come una serie di condensatori infinitesimi di superficie S, distanza fra le armature dx e costante dielettrica relativa ε_r , quindi:

$$C^{-1} = \int_{x=0}^{x=d} dC^{-1} = \int_{x=0}^{x=d}\frac{dx}{S\varepsilon_0\varepsilon_r} = \int_{x=0}^{x=d}\frac{dx}{S\varepsilon_0(ax+b)} = \frac{\ln\frac{ad+b}{b}}{S\,\varepsilon_0 a}$$

Quindi: $C = \frac{S\varepsilon_0 a}{\ln\frac{ad+b}{b}} \quad \therefore$ come sopra.

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Un solenoide circolare, lungo **l** e con diametro **2r**, è costituito da un avvolgimento di **N** spire. Lo spazio dentro il solenoide è riempito con un materiale di permeabilità magnetica relativa costante μ_r. Supponendo di trascurare gli effetti di bordo, quindi come se si trattase di un solenoide infinito, si calcoli il raggio **r** del solenoide sapendo che la sua induttanza vale **L**.



Dati: l = 30 cm ; N = 1000 ; $\mu_r = 10^3$; L= 3 H

Soluzione

L'induttanza del solenoide è definita come: L= ϕ (B(i)) / i , supponendo di far passare una corrente i attraverso le spire.

Il campo B all'interno di un solenoide infinito percorso da una corrente i vale: $B = \mu\, n\, i = \mu\, \frac{N}{l}\, i$ dove $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$

Il flusso del campo B attraverso una spira sarà: $\phi(B)_1 = S \cdot B = \pi\, r^2 \mu\, \frac{N}{l}\, i$

Il flusso totale, attraverso le N spire, sarà quindi: $\phi(B) = N \cdot \phi(B)_1 = \pi\, r^2 \mu\, \frac{N^2}{l}\, i$

L'induttanza sarà quindi: $L = \frac{\phi(B)}{i} = \pi\, r^2 \mu\, \frac{N^2}{l}$ da cui si può calcolare il raggio r: $r = \frac{1}{N}\left[\frac{l \cdot L}{\pi\, \mu}\right]^{1/2} = \frac{1}{N}\left[\frac{l \cdot L}{\pi\, \mu_r \cdot \mu_0}\right]^{1/2}$ ∴

Numericamente: $r = \frac{1}{N}\left[\frac{l \cdot L}{\pi\, \mu_r \cdot \mu_0}\right]^{1/2} = \frac{1}{10^3} \cdot \left[\frac{0{,}3 \cdot 3}{\pi \cdot 10^3 \cdot 4\, \pi\, 10^{-7}}\right]^{1/2} = \frac{1}{10^3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 10 = 1{,}5\; 10^{-2}\, m = 1{,}5\, cm$ ∴

Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali.